

# Planar motion of a pointlike mass along a rotating guideline

**Ranko Artukovic**

Grgura Budislavica 54, 23000 Zadar, Croatia

E-mail: rankoartukovic@yahoo.com

Received 21 June 2014, revised 1 August 2014

Accepted for publication 14 August 2014

Published 15 September 2014

## Abstract

Intuitive understanding of what may seem a simple mechanical problem can often be misleading or hard to predict. The examples described here clearly illustrate the working principle of turbines and centrifugal pumps, as well as the energy transfer that happens simultaneously. Furthermore, these examples are also well-suited to educational purposes to improve understanding of the principle of energy and angular momentum conservation.

Keywords: centrifugal pendulum, C guideline, radial guideline, bead on a rotating circular, centrifugal pendulum, constraint force

## 1. Introduction

A bead on a rotating circular hoop is an interesting mechanical system whose dynamics have been thoroughly studied in several textbooks [1–3] and articles [4–9]. Java simulations may be found on the Web [11, 12]. Different variations of the bead–hoop system with respect to the choice of axes for the rotating hoop and whether to include friction may be found in the literature. The dynamic response of the bead depends very much on this choice. The most studied performance is the one in which the hoop rotates at constant angular velocity around the vertical diameter. In the second performance the hoop rotates around the horizontal diameter [8]. Also, the rotation axis may be shifted parallel to the diameter. In both performances, the three-dimensional (3D) motion of the bead is also influenced by the gravitational force. It is important to emphasize that the system is not closed, because it exchanges energy with the driving device that maintains constant angular speed of the hoop. Performance in which the hoop rotates uniformly in the horizontal plane around the vertical axis that is out of its centre is mentioned more rarely. The classic textbook by Morina [3] states and describes precisely such an example, in which the motion of the bead is two dimensional (2D) and thus not influenced by gravitational force. This paper also describes such performance, but from a different perspective: instead of the hoop, there is a circular groove, coil strip, or channel on

# Ravninsko gibanje točkaste mase uzduž rotirajuće vodilice

*m o j e m u O c u*

**Ranko Artuković**

Grgura Budislavića 54, 23000 Zadar, Hrvatska

E-mail: [rankoartukovic@yahoo.com](mailto:rankoartukovic@yahoo.com)

## Abstract

Intuitivno razumijevanje nekih na izgled jednostavnih mehaničkih problema često može biti pogrešno ili teško predvidljivo. Primjeri koji se ovdje opisuju zorno prikazuju princip rada turbina i centrifugalnih pumpi, kao i transfer energije koji se tamo događa. Također, prikladni su za edukacijske svrhe za bolje razumijevanje zakona očuvanja energije i angularnog momenta.

**Ključne riječi:** centrifugalno njihalo, C vodilica, radijalna vodilica, kuglica na rotirajućem obruču, bočna sila

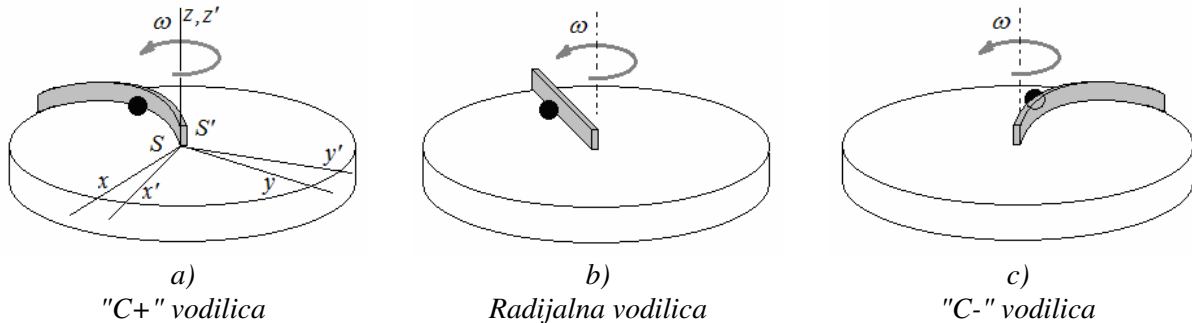
## 1. Uvod

Kuglica koja se giba uzduž rotirajućeg kružnog obruča zanimljiv je mehanički sistem čija se dinamika detaljno proučavala u nekoliko udžbenika [1-3] i članaka [4-9]. Na webu se mogu pronaći Java simulacije [11,12]. U literaturi postoje različite varijacije sistema kuglica-obruč s obzirom na izbor osi rotacije obruča, te da li je uključeno trenje ili ne. Upravo o tom izboru ovisi kakav će biti dinamički odgovor kuglice. Najčešće proučavana izvedba je ona u kojoj obruč rotira stalnom kutnom brzinom oko vertikalnog dijametra. U drugoj izvedbi obruč rotira oko horizontalnog dijametra [8]. Također, os rotacije može biti paralelno pomaknuta s obzirom na dijametar. U obje izvedbe, na 3-dimenzionalno gibanje kuglice utječe i gravitacijska sila. Važno je naglasiti da sustav nije zatvoren, jer izmjenjuje energiju s pogonskim uređajem koji održava stalnu kutnu brzinu obruča. Izvedba u kojoj obruč jednoliko rotira u horizontalnoj ravnini oko vertikalne osi koja je izvan njegovog središta rjeđe se spominje. Klasični udžbenik od D. Morina [3] navodi i opisuje upravo takav primjer. Gibanje kuglice sada je 2-dimenzionalno pa na njega ne utječe gravitacijska sila. I ovaj članak opisuje takvu izvedbu, ali iz jedne drugačije perspektive gdje umjesto obruča imamo kružni utor, žlijeb ili kanal na masivnom rotirajućem disku. Proučava se transfer energije sustava disk-kuglica koristeći Newtonov a zatim Lagrangeov pristup kao provjeru. Spontano se nameće pitanje i drugih zadanih staza na rotirajućem disku kao što je radijalna i spiralna. Traži se općenita zakonitost takvog gibanja za bilo kakav oblik utora ili kanala. Naglasak članka nije na opisu oscilatornog gibanja kuglice, već na transferu energije, izračunu brzine kuglice i usporenja diska, a naročito u momentu kad kuglica napušta disk. Ovdje se radi o posebnom obliku odbojne interakcije dvaju tijela koja se može sasvim dobro opisati primjenom zakona očuvanja. Takav opis vrijedi za bilo koji omjer masa kuglice i diska. Klasični udžbenik H. Goldsteina et al. [10] navodi primjer kuglice koja bez trenja klizi uzduž beskonačne ravne žice koja rotira u slobodnom prostoru. Isti fizikalni smisao ima crtež 1b) u ovom članku, samo je perspektiva drugačija. Fizikalni opis koji slijedi temelji se na jednostavnom računu i opažanjima iz dvaju različitih referentnih sustava. Težnja autora je da članak bude razumljiv studentima preddiplomskih studija.

## 2. Neke rotirajuće vodilice

Vrlo masivni homogeni disk mase  $M$  i radijusa  $R$  slobodno rotira oko stacionarne vertikalne osi koja prolazi njegovim središtem. Disk rotira stalnom kutnom brzinom  $\omega$  u smjeru suprotno gibanju kazaljke na satu (crtež 1). Na disku se nalazi vertikalni zid ili staza. Staza i disk zajedno čine jedno kruto tijelo. Mala kuglica mase  $m \ll M$  počinje se kotrljati od središta prema periferiji diska dodirujući bočni zid. Umjesto bočnog zida može se koristiti pravokutni žlijeb ili utor. Dakle, gibanje

kuglice moguće je samo uzduž staze koja je unaprijed definirana po obliku. Zbog toga, u daljnjem tekstu, umjesto naziva zadana staza koristit ćemo skraćeni naziv *vodilica*. Na crtežu 1a,b,c prikazana su tri različita oblika vodilice: dvije kružne i jedna pravocrtna. Sve vodilice su *ravninske* (2D) jer leže u ravnini diska. *Napomena*: zbog jednostavnijeg računa uvodimo sljedeće idealizacije: zanemarit ćemo trenje, a kuglicu promatramo kao točkastu česticu mase  $m$ .

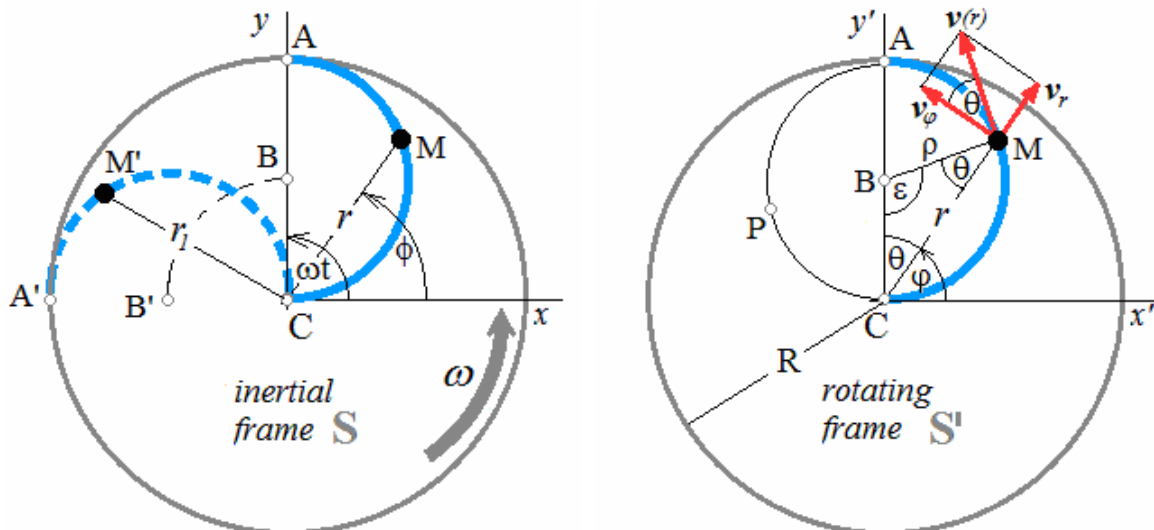


**Crtež 1.** Zbog rotacije masivnog diska, kuglica se kotrlja prema periferiji dodirujući bočni zid ili vodilicu. Vodilice pod a), b) i c) nazvat ćemo redom "C+", radijalna i "C-" vodilica (vidi podnaslov: *Definiranje "C+" i "C-" gibanja*)

Koristit ćemo dva referentna sustava  $S$  i  $S'$ . Oba imaju zajedničko ishodište u središtu diska i zajedničku  $z$  os (crtež 1a).  $S$  je inercijalni laboratorijski sustav, a  $S'$  je rotirajući neinercijalni sustav vezan za disk jer rotira istom kutnom brzinom,  $\omega$ , kao i disk. Tako, sa stajališta opažača iz  $S$  vodilica rotira, a za drugog opažača iz  $S'$  vodilica miruje. Zanima nas u kojem će slučaju, sa stajališta opažača iz  $S'$ , kuglica najbrže napustiti disk?

### 2.1. "C" vodilica

Sada ćemo detaljnije proučiti gibanje kuglice uzduž vodilice polukružnog oblika koja je prikazana na crtežu 1a i 1c. Vodilica CMA (vidi crtež 2 desno) je polukružnica radijusa  $\rho = R/2$ . Središte te kružnice nalazi se u točki B. Neka je u točki C početak, a u točki A kraj vodilice.



**Crtež 2 lijevo:** "C" vodilica prikazana sa stajališta opažača u inercijalnom sustavu  $S$ . U vremenskom intervalu  $\Delta t$  kut rotacije diska je  $\Delta\phi = \omega\Delta t$ . Za to vrijeme kuglica promijeni položaj iz  $M(r, \phi)$  u  $M'(r_1, \phi_1)$ .

**Crtež 2 desno:** "C" vodilica prikazana sa stajališta opažača u rotirajućem sustavu  $S'$ . Kuglica se giba brzinom  $v(r)$  uzduž vodilice CMA, formule (9) - (12), a disk i vodilica

miruju. Sasvim točna je i sljedeća tvrdnja: Opažač vidi njihalo duljine  $\rho=BM$  koje se njiše oko točke B. Ravnotežni položaj njihala je u točki A.

### Definiranje "C+" i "C-" gibanja

Disk se vrti stalnom kutnom brzinom  $\omega$  oko vlastitog središta C. Gledano iz točke B, kuglica se giba po kružnoj vodilici radijusa  $\rho$  kutnom brzinom  $\omega'$ . Ako su vektori kutnih brzina  $\omega$  i  $\omega'$  paralelni, gibanje ćemo nazvati "C+" (čitaj *C plus*; crtež 1a i crtež 2). U drugom slučaju, kada su vektori  $\omega$  i  $\omega'$  antiparalelni, gibanje ćemo nazvati "C-" (čitaj *C minus*; crtež 1c).

Kuglica se giba uzduž vodilice CMA (crtež 2 desno) brzinom  $v$  koju ćemo iz jednostavnog razloga nazvati *tangencijalna brzina* jer vektor  $v$  leži na tangenti krivulje u točki  $M(r, \varphi)$ .

Važno je napomenuti da je  $v$  brzina koju mjeri opažač u rotirajućem sustavu S'. Radijusvektor položaja,  $r$ , zatvara kut  $\varphi$  sa  $x'$  osi. Položaj se mijenja u granicama od  $r_0$  do  $R$ , a kut  $\varphi$  u granicama od  $0$  do  $\pi/2$  (početak odnosno kraj vodilice). Brzinu  $v$  možemo rastaviti na dvije međusobno okomite komponente: *azimutalnu*  $v_\varphi$  i *radijalnu*  $v_r$ .

Kut  $\theta$  ili *priklon* definira se kao kut između vektora  $v$  i  $v_\varphi$  (vidi crtež 2 desno). Dakle  $\theta$  je kut između tangencijalnog i azimutalnog vektora brzine. Iz jednostavnih geometrijskih odnosa sa crteža 2 desno, dobiva se

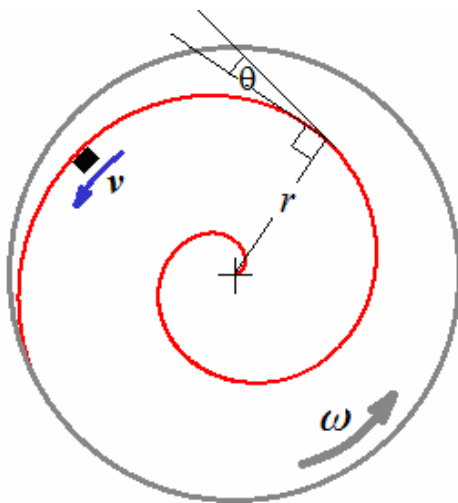
$$\theta(r) = \arccos\left(\frac{r}{R}\right) \quad \text{ili} \quad r = R \cdot \cos\theta \quad (1)$$

Priklon se mijenja se u granicama  $\pi/2 \geq \theta \geq 0$ . Uvedimo tzv. *funkciju vodilice*,  $h(r)$ , na sljedeći način:

$$h(r) = \frac{d}{dr}\theta(r) = -\frac{1}{R \cdot \sin\theta(r)} \quad (2)$$

### 2.2. Spiralna vodilica

Na masivnom disku radijusa  $R$  nalazi se vodilica spiralnog oblika, a središte spirale je u središtu diska. Disk i spiralna vodilica zajedno čine kruto tijelo koje rotira stalnom kutnom brzinom  $\omega$  oko vlastitog središta (crtež 3).



#### Crtež

**3.** Pogled odozgo na masivni disk koji rotira stalnom kutnom brzinom  $\omega$ . Na disku se nalazi vertikalni zid (vodilica) savijen u oblik spirale. Spirala i disk zajedno rotiraju kao kruto tijelo. Zbog rotacije diska, malo tijelo klizi brzinom  $v$  na način da stalno dodiruje bočni zid. Tako tijelo stiže iz središta na periferiju diska.  $\theta$  je kut između tangencijalnog i azimutalnog vektora brzine.

U polarnim koordinatama jednadžba spirale koja počinje u središtu diska je:

$$r = p \cdot \varphi \quad (3)$$

dakle

$$\varphi(r) = \frac{r}{p} \quad (4)$$

gdje je  $r$  udaljenost točke  $M(r, \varphi)$  od središta spirale,  $p$  je konstanta. Što je  $p$  manji, spirala ima više zavoja unutar kružnice radijusa  $R$ . Obrnuto, povećanjem parametra  $p$  spirala postaje sve manje zakrivljena, te u konačnici postaje ravna radialna crta. U slučaju spiralne putanje, ranije definirani kut  $\theta$  ili priklon je:

$$\theta(r) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan} \left( \frac{r}{p} \right) \quad (5)$$

a funkcija vodilice je:

$$h(r) = \frac{d}{dr} \theta(r) = - \frac{p}{r^2 + p^2} \quad (6)$$

Kako idemo prema periferiji spirale, priklon (14) se sve više smanjuje. Naprotiv, u središtu spirale priklon je  $90^\circ$ .

### 2.3. Radijalna vodilica

Pravocrtnu vodilicu prikazanu na crtežu 1b) nazvat ćemo *radijalna vodilica*. To je specijalni slučaj spiralne vodilice kad parametar  $p$  u formulama (5) i (6) teži u beskonačnost, dakle  $p \rightarrow \infty$ .

Za radijalnu vodilicu, formule (5) i (6) imaju još jednostavniji oblik:

$$\theta(r) = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

$$h(r) = \frac{d}{dr} \theta(r) = 0 \quad (8)$$

## 3. Jednadžba gibanja i energija

### 3.1. Brzina i ubrzanje

Uzduž "C" vodilice (crtež 2 desno), odnosno uzduž spiralne vodilice (crtež 3) giba se malo tijelo brzinom  $v(r)$ . To je brzina koju mjeri opažatelj u rotirajućem sustavu  $S'$ . U polarnim koordinatama, brzina je:

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\varphi \hat{\varphi} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi} \quad (9)$$

Dakle, brzinu smo rastavili na dvije međusobno okomite komponente: *azimutalnu*  $v_\varphi$  i *radijalnu*  $v_r$ . One su redom:

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r \dot{\varphi} = \pm v \cdot \cos \theta \quad (10)$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm v \cdot \sin \theta \quad (11)$$

$$v = \sqrt{v_\phi^2 + v_r^2} \quad (12)$$

*Napomena:* Uočimo da kod radijalne vodilice, zbog (7), postoji samo radijalna komponenta brzine, a azimutalna iščezava. U slučajevima "C" i spiralne vodilice postoje obje komponente.

*Napomena:* U formulama (10) i (11) korišten je dvostruki predznak. Gornji predznak odnosi se na "C+" vodilicu, a donji na "C-" vodilicu. U daljnjem tekstu izostavit ćemo donji predznak i proučavati samo "+" vodilice.

Za izvod jednadžbe gibanja opažanja vršimo iz inercijalnog sustava S. Brzina kuglice sada je

$$\vec{V} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} = V_r \hat{r} + V_\phi \hat{\phi} \quad (13)$$

gdje je  $\phi$  kut između radijusvektora  $r$  i  $x$  osi. Radijalna i azimutalna komponenta brzine su redom:

$$V_r = \dot{r} = v_r = v \sin \theta \quad (14)$$

$$V_\phi = r \dot{\phi} = \omega \cdot r + v_\phi = \omega \cdot r + v \cdot \cos \theta \quad (15)$$

$$V = \sqrt{V_\phi^2 + V_r^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 + 2\omega r v \cdot \cos \theta + v^2} \quad (16)$$

Tako, formule (14), (15) i (16) povezuju brzine  $V(r)$  i  $v(r)$  u dva različita sustava, S i S'. Ubrzanje kuglice i njegove komponente su

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{r}) \hat{\phi} = a_r \hat{r} + a_\phi \hat{\phi} \quad (17)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \quad (18)$$

$$a_\phi = r\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{r} \quad (19)$$

Također,

$$\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d\dot{\phi}}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d\dot{\phi}}{dr} v_r = \frac{d\dot{\phi}}{dr} \cdot v \cdot \sin \theta \quad (20)$$

U konkretnom slučaju sa crteža 2 i 3, te uzimajući u obzir formule (10), (11), (14), (15), (18), (19) i (20), komponente ubrzanja su redom:

$$a_\phi = v \cdot \sin \theta \cdot \left[ 2\omega + \left( \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} \right) \cdot \cos \theta - v \cdot h(r) \cdot \sin \theta \right] \quad (21)$$

$$a_r = v \cdot \sin \theta \cdot \left( \sin \theta \cdot \frac{dv}{dr} + v \cdot h(r) \cdot \cos \theta \right) - r \cdot \left( \omega + \frac{v}{r} \cdot \cos \theta \right)^2 \quad (22)$$

gdje je 
$$h(r) = \frac{d\theta}{dr} \quad (23)$$

Funkcija vodilice,  $h(r)$ , ovisi o obliku vodilice, pa se mogu koristiti formule (2), (6) ili (8). Iznos ubrzanja (sile) je:

$$a = \sqrt{a_\phi^2 + a_r^2} \quad (24)$$

### 3.2. Rad diska

Sada uočimo sljedeću vrlo važnu činjenicu: za prijenos energije s masivnog diska na kuglicu važna je samo azimutalna komponenta sile  $F_\phi = m a_\phi$ . Naime, ona stvara zakretni moment koji teži usporiti rotaciju diska. Također možemo reći da masivni rotirajući disk gura kuglicu silom  $F_\phi$  u smjeru vlastite rotacije. Tako disk vrši rad, pa kinetička energija kuglice raste. Elementarni azimutalni pomak diska je

$$ds = r \cdot d\vartheta = r \cdot \omega \cdot dt \quad (25)$$

*Oprez:* Ako bi u (25), umjesto azimutalnog pomaka diska, računali s azimutalnim pomakom kuglice, to bi nas odvelo na krivi put. Zašto? Na primjer, neka se kuglica giba uzduž "C" vodilice na disku koji miruje u inercijalnom sustavu S (disk ne rotira, dakle  $\omega=0$ ). Iako u tom slučaju postoji azimutalni pomak kuglice, ipak se ne vrši nikakav rad, pa brzina kuglice (u odsutnosti trenja) ostaje ista.

Rad azimutalne komponente  $F_\phi$  je:

$$dW = F_\phi \cdot ds = F_\phi \omega r dt = F_\phi \omega r \frac{dr}{\dot{r}} = m \cdot a_\phi \omega r \frac{dr}{\dot{r}} \quad (26)$$

Uzimajući u obzir formule (14), (15), (21) i (26) imamo

$$\frac{dW}{m} = 2\omega^2 r dr + \left[ \left( \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} \right) \cdot \cos\theta - v \cdot h(r) \cdot \sin\theta \right] \cdot \omega r dr \quad (27)$$

### 3.3. Jednadžba gibanja

Prema zakonu očuvanja energije, uloženi rad diska jednak je promjeni kinetičke energije kuglice:

$$dW = dK \quad (28)$$

ili 
$$F_\phi ds = mVdV \quad (29)$$

Koristeći formulu (16), nakon deriviranja dobije se

$$\frac{dK}{m} = V \cdot dV = \omega^2 r dr + \left[ \left( \frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} \right) \cdot \cos\theta - v \cdot h(r) \cdot \sin\theta \right] \cdot \omega r dr + v dv \quad (30)$$

Ako sada izjednačimo (27) i (30), kao što nalaže zakon očuvanja energije, (28), dobijemo

$$\omega^2 r \cdot dr = v \cdot dv \quad (31)$$

Integriranjem lijeve strane u granicama od  $r_0$  do  $r$ , a desne od  $v_0$  do  $v$ , dobivamo da je, sa stajališta opažača u rotirajućem sustavu S', brzina kuglice:

$$v(r) = \sqrt{\omega^2 (r^2 - r_0^2) + v_0^2} \quad (32)$$

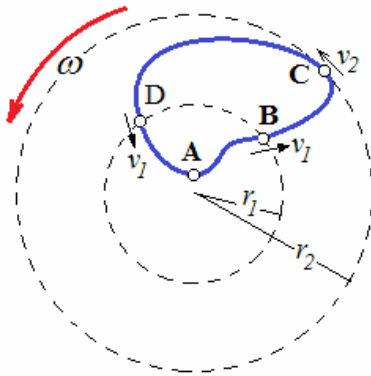
Gornje rješenje vrijedi za spiralnu, radijalnu i "C" vodilicu, ali i sasvim općenito za bilo koji oblik vodilice.

### 3.4. Teoremi

Neka se čestica giba bez trenja uzduž glatke, zatvorene, jednoliko rotirajuće vodilice (crtež 4). Neka čestica krene brzinom  $v_0$  s početnog položaja  $r_0$  koji je najbliži središtu rotacije. U tom slučaju vrijedi sljedeći

**Teorem 1:** U jednoliko rotirajućim sustavima brzina čestice uzduž vodilice ovisi samo o radijalnoj udaljenosti od središta rotacije. Brzina čestice ne ovisi o obliku vodilice.

**Dokaz:** Pretpostavimo da gornji teorem nije točan. U tom slučaju, uzastopnim cirkuliranjem čestice po zatvorenoj krivulji mogli bi kinetičku energiju čestice pretvarati u toplinsku i tako usporavati disk koji bi se u konačnici prestao okretati. A to je u kontradikciju sa zakonom očuvanja angularnog momenta zatvorenog sustava! Rotacija masivnog diska ne može nikada prestati, bez obzira na kruženje čestice po zatvorenoj krivulji. Radijalnim dislociranjem čestice, ukupni moment inercije,  $I$ , mijenja se u vrlo uskim granicama, pa tako i kutna brzina,  $\omega$ , ali na način da je  $L = I\omega = \text{const.}$



**Crtež 4.** Čestica cirkulira uzduž zatvorene krivulje ABCDA. Točke B i D neka se nalaze na istoj radijalnoj udaljenosti  $r_1$  od središta diska. Prema formuli (32), odnosno Teoremu 1, brzina u točkama B i D je ista i jednaka  $v_1$ . Tijekom kruženja po zatvorenoj krivulji, brzina u točki A uvijek je ista i jednaka  $v_0$ . Ovo vrijedi bez obzira na smjer obilaska zatvorene krivulje. Dakle, ovdje se radi o svojstvu konzervativne sile u rotirajućem neinercijalnom sustavu  $S'$ . U matematičkom obliku to je

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Poznavajući rješenje (32), možemo izračunati brzine, formule (9)-(16); ubrzanja ili sile, formule (21)-(24) i rad diska, formula (27).

Vrijeme potrebno da kuglica stigne iz položaja  $r_0$  u položaj  $r$  može se izračunati pomoću (11):

$$t(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{v \cdot \sin \theta} \quad (33)$$

Iz formula (10) i (11) može se izračunati kut  $\varphi$ :

$$\varphi(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r \cdot \tan \theta} \quad (34)$$

**Teorem 2:** U inercijalnom sustavu  $S$ , rezultantna sila na česticu okomita je na vodilicu kojom se čestica giba (crtež 6).

**Dokaz:** Koristeći bilo koju od formula (1), (5) ili (7), a zatim (21), (22) i (24) može se pokazati da je:

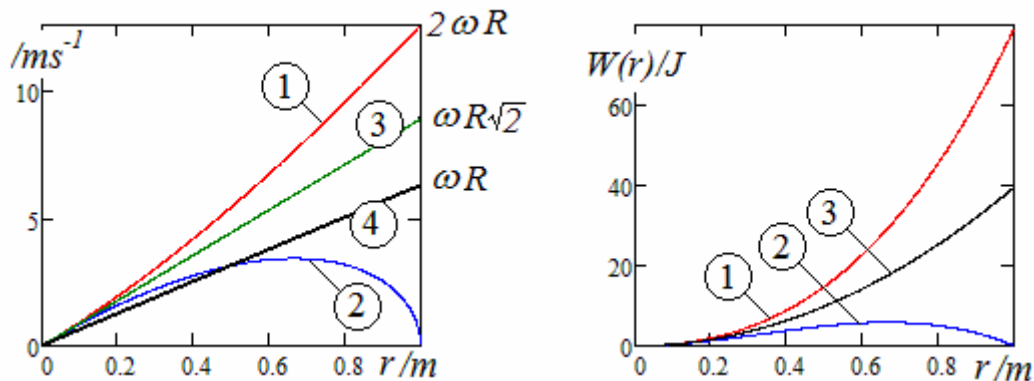


$$\cos \theta = \frac{|a_r|}{a} = \frac{v_\varphi}{v} \quad (35)$$

pa iz (35) proizilazi da su vektori akceleracije  $\mathbf{a}$  i brzine  $\mathbf{v}$  međusobno okomiti.

**Primjer:** Kuglica se giba od središta prema periferiji rotirajućeg diska uzduž "C" vodilice (crtež 2). Prikažimo rješenja u grafičkom obliku. Neka su zadani sljedeći parametri:

$$R=1m \quad ; \quad \omega=2\pi s^{-1} \quad ; \quad r_0=0 \quad ; \quad v_0=0 \quad (36)$$



**Crtež 5. lijevo:** Krivulje broj 1, 2 i 3 prikazuju brzinu kuglice,  $V(r)$ , u inercijalnom sustavu S, formula (16). Kuglica je najbrža uzduž "C+" vodilice (krivulja1), na čijem je kraju brzina  $V(R)=2\omega R$ . Na kraju "C-" vodilice, (krivulja2), kuglica miruje, dakle  $V(R)=0$ . Slični grafovi dobiju se za spiralnu vodilicu. Pravac broj 3 odnosi se na radijalnu vodilicu. Pravac broj 4 prikazuje brzinu kuglice u rotirajućem neinercijalnom sustavu S', formula (32). Uočimo da ta brzina ne ovisi o obliku vodilice. Dakle, jednaka je za svaku vodilicu na crtežu 1a,b,c. To je ujedno i odgovor na pitanje postavljeno na kraju uvodnog dijela ovog članka.

**Crtež 5. desno:** Rad diska, formula (27). Krivulje broj 1, 2, 3 odnose se redom na "C+", "C-" i radijalnu vodilicu. Kao što vidimo, rad je najveći za "C+" vodilicu, krivulja1. Važno je uočiti da kod "C-" vodilice, krivulja2., disk u konačnici ne obavi nikakav rad. *Napomena za spiralnu vodilicu (crtež 3):* Rad diska može biti bilo koja krivulja u području između krivulja 1 i 3, što ovisi o parametru  $p$  spirale, formula (3).

#### 4. Lagrangeova metoda

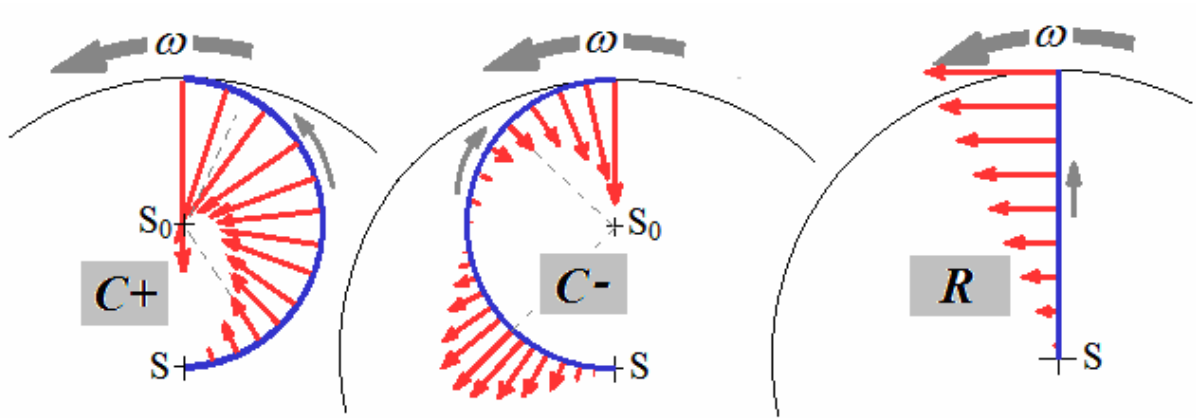
Jednadžbu gibanja (31) i rješenje (32) dobili smo primjenom Newtonovih zakona. Pokušajmo isti rezultat dobiti primjenom Lagrangeovog formalizma. Lagrangian,  $L$ , jednak je razlici kinetičke i potencijalne energije, dakle  $L=K-U$ . Zbog ravninskog gibanja potencijalna energija iščezava, pa ostaje samo  $L=K$ .

**Radijalna vodilica** prikazana je na crtežu 1b. Uzimajući u obzir formule (7), (10)-(12) i (16), Lagrangian je

$$L = K = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}(\omega^2 r^2 + \dot{r}^2) \quad (37)$$

Primjenjujući Euler-Lagrangeovu jednadžbu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (38)$$



**Crtež 6.** Ukupna sila kojom disk djeluje na kuglicu jednaka je umnošku mase i totalne akceleracije, formula (24). Ovu silu mjeri opažatelj iz inercijalnog sustava S. Na crtežu su redom prikazani vektori ukupne sile za "C+", "C-" i radijalnu vodilicu. Sve tri crteža fizikalno su vrlo zanimljive. Kod "C-" vodilice sila mijenja smjer. Uočava se da je rezultatna sila na česticu okomita na vodilicu kojom se čestica giba, formula (35).

nakon izračuna (38) dobivamo  $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$  (39)

gdje je  $\ddot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dr} \dot{r}$  (40)

pa je formula (39) sada  $\dot{r} \frac{dr}{dr} - \omega^2 r = 0$  (41)

Rješenje je  $\dot{r} = v(r) \cdot \sin \theta = \sqrt{\omega^2 (r^2 - r_0^2) + v_0^2}$  (42)

Za radijalnu vodilicu  $\theta = \pi/2$ , pa je formula (32) za brzinu čestice valjana.

**"C" vodilica** prikazana je na crtežima 1a,c i 2). Koristeći crtež 2 desno, vidimo da je

$$\varepsilon = \pi - 2\theta \quad (43)$$

ili  $\dot{\varepsilon} = -2\dot{\theta}$  (44)

brzina čestice je  $v = \rho \cdot \dot{\varepsilon} = \frac{R}{2} (-2\dot{\theta}) = -R\dot{\theta}$  (45)

Uzimajući u obzir formule (1), (11) i (16), Lagrangian je

$$L = K = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2} (\omega^2 r^2 + 2\omega r v \cdot \cos \theta + v^2) \quad (46)$$

Zbog (45) imamo

$$L = mR^2 \cdot \left[ \omega \cdot \cos^2 \theta \cdot \left( \frac{\omega}{2} - \dot{\theta} \right) + \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right] \quad (47)$$

Primjenjujući Euler-Lagrangeovu jednadžbu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (48)$$

nakon izračuna dobivamo:  $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta \cdot \cos \theta = 0$  (49)

Iz formule (45) proizilazi

$$\ddot{\theta} = -\frac{\dot{v}}{r} = -\frac{1}{R} \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{dv}{dr} \dot{r} = -\frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dr} v \cdot \sin \theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} v \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (50)$$

pa je (49) sada:  $-\frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} v \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + \omega^2 \sin \theta \cdot \cos \theta = 0$  (51)

ili  $v dv = \omega^2 r dr$  (52)

čije je rješenje isto kao (42).

**Spiralna vodilica** prikazana je na crtežu 3. Uzimajući u obzir formule (4), (5) imamo

$$\sin \theta = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \text{atan} \varphi \right) = \cos (\text{atan} \varphi) = \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + r^2}} \quad (53)$$

Formula (11) je sada  $v = \frac{\dot{r}}{\sin \theta} = \dot{r} \sqrt{1 + \frac{r^2}{p^2}}$  (54)

Uzimajući u obzir formulu (16), Lagrangian je isti kao u (46). Uvažavajući formulu (54) dobivamo

$$L = \frac{m}{2} \omega^2 r^2 + m\omega \frac{r^2 \dot{r}}{p} + \frac{m}{2} \dot{r}^2 \left( 1 + \frac{r^2}{p^2} \right) \quad (55)$$

Primjenjujući Euler-Lagrangeovu jednadžbu (38) dobivamo

$$\ddot{r} \frac{p^2 + r^2}{p^2} + \frac{r \dot{r}^2}{p^2} - \omega^2 r = 0 \quad (56)$$

pa rješenje  $\dot{r} = \sqrt{\omega^2 (r^2 - r_0^2) + v_0^2} \cdot \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + r^2}}$  (57)

zadovoljava gornju jednadžbu. Uvažavajući formule (53) i (54) dobivamo rješenje (32) za brzinu čestice. Kao što se i očekuje, Lagrangeova i Newtonova metoda daju ista rješenja.

### 5. Opće rješenje za bilo koju masu

Sva ranija rješenja za brzine, akceleracije i energiju su aproksimativna, jer vrijede samo ukoliko je masa kuglice puno manja u odnosu na masu diska (ili ako je disk povezan s pogonskim uređajem koji mu održava stalnu kutnu brzinu). U tom slučaju usporenje diska biti će zanemarivo. Dakle, kutna brzina diska ostat će nepromijenjena.

Što ako je masa kuglice veća, a disk nije povezan s pogonskim elektromotorom već se vrti po vlastitoj inerciji? U tom slučaju usporenje diska bit će znatno veće, pa će njegova kutna brzina opasti. Upravo želimo opisati taj slučaj. On se može relativno lako riješiti koristeći zakone očuvanja.

#### Radijalna vodilica na rotirajućem disku

Primjenom zakona očuvanja ukupnog angularnog momenta za konkretan slučaj na crtežu 1b imamo

$$I\omega_0 = (I + mR^2)\omega \quad (58)$$

Gornja formula odnosi se na dva krajnja položaja kuglice: središte diska i rub diska. Kada kuglica stigne na rub, kutna brzina diska je:

$$\omega = \omega_0 \cdot \frac{I}{I + mR^2} \quad (59)$$

Azimutalna komponenta brzine kuglice je

$$v_a = \omega R = \omega_0 R \cdot \frac{I}{I + mR^2} \quad (60)$$

Primjenom zakona očuvanja energije imamo:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m(\omega R)^2}{2} + \frac{mv_r^2}{2} \quad (61)$$

Zadnja dva člana na desnoj strani predstavljaju kinetičku energiju kuglice. Radijalna brzina kuglice,  $v_r$ , može se lako izračunati koristeći formule (59) i (61).

#### C vodilica na rotirajućem disku

Postavimo zakon očuvanja angularnog momenta za konkretan slučaj na crtežu 1a.

$$I\omega_0 = I\omega + mvR \quad (62)$$

i zakon očuvanja ukupne mehaničke energije

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \quad (63)$$

Dvije prethodne formule odnose se na dva krajnja položaja kuglice: središte diska i rub diska. Iz (62) i (63) proizilazi da je brzina kuglice kada stigne na rub diska

$$v = 2 \omega_0 R \cdot \frac{I}{I + mR^2} \quad (64)$$

To je brzina koju mjeri opažač u inercijalnom sustavu. Zbog zakrivljene vodilice radijalna komponenta brzine jednaka je nuli. Dakle, preostaje samo tangencijalna (azimutalna) brzina (64). Kutna brzina diska sada je

$$\omega = \frac{I - mR^2}{I + mR^2} \omega_0 \quad (65)$$

## 6. Zaključak

Kao što pokazuju gornji rezultati, gibanje kuglice uzduž horizontalne rotirajuće vodilice u potpunom je suglasju sa zakonom očuvanja energije, formula (28). Ipak, opažanja iz različitih referentnih sustava, (S i S'), jako se razlikuju i bilo bi ih teško intuitivno predvidjeti. To naročito vrijedi za brzine prikazane na crtežu 5 lijevo. U rotirajućem sustavu S' brzine su jednake i neovisne o obliku vodilice. Naprotiv, u inercijalnom sustavu S brzine se jako razlikuju, jer ovise o obliku vodilice. Ukoliko gibanje kuglice uzduž "C+" i "C-" vodilice promatramo kao njihalo, posebno je zanimljivo uočiti izmjenu energije između diska i njihala (crtež 5 desno, krivulje 1 i 2) kao i različitu silu napetosti njihala (crtež 6 lijevo i sredina). Osim direktnom primjenom Newtonovih zakona, ista rješenja dobivena su primjenom Lagrangeove metode. U konačnici, primjenom zakona očuvanja dobivena su općenita rješenja. U članku se ističe važnost dvaju teorema koji vrijede za gibanje uzduž jednoliko rotirajuće vodilice.

## Literatura:

- [1] Taylor J.R., Classical Mechanics (University Science, Sausalito, CA, 2005) pp. 260-265.
- [2] Brizard, A. J. , An Introduction to Lagrangian Mechanics (Department of Physics. Saint Michael's College. March 15, 2008) pp. 44-46
- [3] Morin D., Introduction to Classical Mechanics With Problems and Solution (Cambridge University Press 2008), pp. 248, 264-266
- [4] Dutta S. and Ray S. 2011 Bead on a rotating circular hoop: a simple yet feature-rich dynamical system *arXiv:1112.4697v1*
- [5] Dutta S. and Ray S. 2011 Damped bead on a rotating circular hoop - a bifurcation zoo *arXiv:1201.1218v1*
- [6] Baker T. E. and Bill A., Jacobi Elliptic Functions and the Complete Solution to the Bead on the Hoop Problem *arXiv:1201.4201v1*
- [7] Ochoa F. and Clavijo J., Bead, Hoop, and Spring as a Classical Spontaneous Symmetry Breaking Problem *Eur. J. Phys.* **27**, 1277 (2006)
- [8] Johnson A. K. and Rabchuk J. A. 2009 A bead on a hoop rotating about a horizontal axis: A one-dimensional ponderomotive trap *Am. J. Phys.* **77** 1039
- [9] Rosales, Rodolfo R. "Bead moving along a thin, rigid, wire." Department of mathematics. Massachusetts Inst. of Technology, Cambridge, Massachusetts, MA. October 17, 2004.
- [10] Goldstein H., Poole C., Saffko J., Classical Mechanics, 3rd ed. (Addison Wesley, San Francisco, 2002) pp. 28-29
- [11] <http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=7890>
- [12] <http://www.theshapeofmath.com/mathtoys/rotatinghoop>